Introduction à la théorie des nombres - plan de la séance

Nadia Lafrenière

7 mai 2014

Résumé

En plus de représenter une branche à part entière des mathématiques, la théorie des nombres transcende toutes les mathématiques. On peut donc étudier divers problèmes sur les nombres entiers (ou sur d'autres types de nombres) par des méthodes algébriques, analytiques, combinatoires ou même géométriques ! Nous étudierons trois de ces problèmes :

— Le théorème de Wantzel sur le lien entre les nombres constructibles (à la règle et au compas) et les nombres algébriques (algèbre, géométrie et théorie des nombres).
— La répartition des nombres premiers (analyse).
— L'expression de tous les nombres entiers comme sommes d'un nombre borné de nombres premiers (combinatoire et analyse).

L'atelier est ouvert à toutes les étudiantes et à tous les étudiants, de la première à la troisième année, et cherchera à satisfaire la curiosité de chacun et de chacune !

Introduction : Ce qu'est la théorie des nombres

Les raisons de s'intéresser à la théorie des nombres sont multiples. Notons au passage que la théorie des nombres permet de résoudre des problèmes géométriques (courbes elliptiques, théorème de Fermat), algébriques (théorie de Galois, possibilité de connaître l'existence de solutions d'une équation dans un corps donné), analytiques (comportements asymptotiques), combinatoires (dénombrement des progressions arithmétiques d'un ensemble de nombre) ou algorithmiques (de l'utilité des nombres premiers en cryptographie). Il paraît donc naturel de s'y intéresser dans le contexte d'un baccalauréat en mathématiques.

Il n'est cependant pas possible de couvrir toute la théorie en quelques heures. On vous propose cependant un aperçu de trois problèmes choisis.

1 Nombres constructibles et nombres algébriques

Un nombre constructible est une coordonnée d'un point constructible (à la règle et au compas) dans un repère orthonormé. Un point est constructible s'il est l'intersection de deux droites, d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles constructibles.

Quels points sont constructibles ?

Il est plutôt connu que les opérations de division et de multiplication sont réalisables à la règle et au compas. Ainsi, tous les nombres rationnels sont constructibles.

On connaît aussi des nombres constructibles qui ne sont pas rationnels. Nous pouvons notamment penser à $\sqrt{2}$ qui est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les cathètes sont de longueur 1.

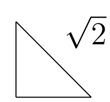

FIGURE 1 – $\sqrt{2}$ est constructible. C'est la longueur qui sépare $(1,0)$ et $(0,1)$, deux points constructibles.

Théorème 1 (Wantzel)**.** *Un nombre réel x est constructible si et seulement si il existe une suite finie de corps L_i telle que*

1. $\mathbb{Q} = L_0$;
2. L_{i+1} *est une extension quadratique de* L_i, *c'est-à-dire que les nombres de* $L_{i+1} \backslash L_i$ *sont racines de polynômes de degré 2 à coefficients dans* L_i ;
3. $x \in L_n$.

Une idée de la démonstration est donnée en séance. Dans cette idée, on cherchera les solutions aux systèmes dans lesquels les équations d'une droite et d'un cercle, de deux droites ou de deux cercles sont égales.

Quelques conséquences du théorème

Corollaire 1. *La duplication du cube est impossible.*

Corollaire 2. *La trisection de l'angle n'est en général pas possible.*

Corollaire 3. *La quadrature du cercle ne peut être réalisée (car π est transcendant).*

Les idées de preuve sont données en séance.

2 La répartition des nombres premiers

Théorème 2 (des nombres premiers)**.** *Le n-ième nombre premier vaut approximativement $n \log n$.*

Remarque. *Ce théorème est souvent reformulé de deux façons :*

- *Il existe $\log n$ nombres premiers plus petits que n.*
- *La densité des nombres premiers inférieurs à n vaut $\frac{\log n}{n}$.*

Vidéo : Terence Tao, Structure and Randomness in the Prime Numbers ([2]).

3 Exprimer les nombres comme la somme de nombre premiers

3.1 La conjecture de Goldbach

La conjecture de Goldbach est un problème non-résolu qui date du XIII^{e} siècle et qui a été formulé par Euler et Goldbach. Elle stipule que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers (on se rappellera que 1 n'est pas premier). Elle a été vérifiée numériquement pour tous les nombres jusqu'à 4×10^8. Ce qui a récemment été prouvé (2013) est que tout nombre impair est la somme de trois nombres premiers. Ce résultat est similaire à la conjecture faible de Goldbach.

3.2 Une preuve avec onze nombres premiers

Théorème 3. *Tout entier positif peut s'écrire comme la somme de onze nombres premiers.*

Quelques préalables avant la preuve...

Definition 1 (Densité de Schnirelmann)**.** *On définit la densité de Schnirelmann d'un ensemble d'entiers naturels A par*

$$\sigma(A) = \inf_{n \geq 1} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}.$$

Lemme 1. *Si $\sigma(A) > 0$ et que A contient 0, A est une base asympotique de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que l'addition des éléments de A un certain nombre de fois pourra engendrer chacun des éléments de $\mathbb{N}$.)*

Démonstration. Idée donnée en séance. □

Cela a pour conséquence que, si $\sigma(A)$ est à la fois petit et non-nul, le plus petit entier $m \geq \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1-\sigma(A)}}$, est tel que la somme de $2m$ éléments de A contient tous les entiers. Ainsi, on doit seulement montrer que $\sigma(2\mathbb{P}) > 0$ et calculer une borne sur cette valeur pour obtenir le résultat du théorème.

Lemme 2 (Théorème de Schnirelmann)**.** *Soient A et B deux ensembles d'entiers et supposons que $1 \in A$ et $0 \in B$. Alors, $\sigma(A + B) \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B)$.*

Démonstration. Pour la preuve, il est conseillé de voir [1], théorème 2.2. □

Lemme 3 (Théorème de Mann)**.** *Si $0 \in A \cap B$, $\sigma(A + B) \geq \min\{1, \sigma(A) + \sigma(B)\}$.*

Démonstration. La preuve est celle du théorème 2.13 dans [1]. □

La preuve du théorème est en annexe.

Références

[1] A. Granville, B. Green. A First Course in Additive Combinatorics, à paraître, 2014 [11 avril 2014].

[2] T. Tao. Structure and Randomness ine the Prime Numbers, University of Sydney, 8 février 2008. La vidéo est disponible en ligne : `http://www.youtube.com/watch?v=hYxBH1YY9z4`, le théorème est présenté à 21 :37.