

## Résumé

Dans cet exposé, nous ferons la preuve complète de la formule du déterminant Jacobi-Trudi dual. Une bonne partie de la preuve de ce théorème est disponible dans «Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces» de François Bergeron ou dans «The symmetric group : representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions» de Bruce Sagan. Ils utilisent la méthode de Lindström. Cependant, la preuve du déterminant Jacobi-Trudi étant très similaire à plusieurs endroits, l'auteur laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est également vrai pour le déterminant Jacobi-Trudi dual c'est pourquoi j'ai décidé d'en faire la preuve complète dans cette présentation.

**Rappel :** Nous dirons que  $\mu = \mu_1, \dots, \mu_k$  est un **partage** de  $n$ , noté  $\mu \vdash n$  si :

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k \geq 1 \text{ et}$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = n.$$

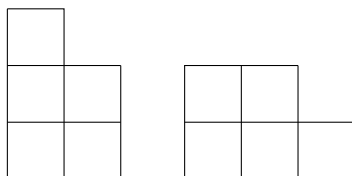
Un **diagramme** est un ensemble de cases dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , nous associerons à chaque case la coordonnée de son coin inférieur gauche. Un **diagramme de Ferrers**,  $\mu$ , est un diagramme satisfaisant la condition suivante :

$$\text{Si } (i, j) \in \mu \text{ alors } \forall a \leq i \text{ et } \forall b \leq j, (a, b) \in \mu.$$

Puisque la condition oblige le diagramme de Ferrers à avoir un nombre décroissant de cases par lignes, par abus nous désignerons  $\mu$  autant pour un diagramme de Ferrers que pour un partage. Remarquons que le diagramme aura  $\mu_i$  cases dans la ligne  $i$ . Sont **conjugué**  $\mu' = \mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_{\mu_1}$  est tel que  $\mu'_i$  correspond au nombre de cases dans la colonne  $i$  du diagramme  $\mu$ .

**Exemple :** Prenons le partage  $221 \vdash 5$  (il est d'usage d'omettre les virgules si les nombres sont inférieurs à 10).

Alors le diagramme associé à 221 (à gauche) et son conjugué 32 (à droite) sont :



Pour  $D$  un diagramme, nous dirons que la fonction  $\tau : D \rightarrow \mathbb{N}$  est un **tableau**. Si les entrées du tableau sont strictement croissantes le long des colonnes et croissantes le long des lignes alors nous dirons que c'est un **tableau semi-standard**.

**Exemple :** Pour le partage 221, voici un tableau (à gauche) et un tableau semi-standard (à droite) :

5	
3	63
111	9

5	
2	3
1	1

Soit  $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  un polynôme à  $n$  variables dans  $\mathbb{Q}$ . Nous dirons que  $f$  est un **polynôme symétrique** si pour tout  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  nous avons :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Nous considérerons un ensemble infini de variables noté  $X$ . La façon rigoureuse mathématique de faire ceci sort du cadre de l'exposé, mais il est possible de le lire dans «Symmetric functions and Hall polynomials» de I.G.Macdonald.

Nous définissons la base des fonctions **de Schur** par l'ensemble  $\{s_\mu(X)\}_{\mu \vdash n \in \mathbb{N}}$  où pour  $\mu$  tel que  $|\mu| = n$ , nous avons :

$$s_\mu(X) := \sum_{\tau} x_\tau,$$

où la somme est prise sur l'ensemble des tableaux semi-standard définis par les fonctions  $\tau : \mu \rightarrow \mathbb{N}$  et  $x_\tau = \prod_{c \in \mu} x_{\tau(c)}$ . Nous noterons  $s_\mu$  pour  $s_\mu(X)$ .

**Exemple :**

$$\begin{aligned} s_{21}(x, y, z) &= \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \ x \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \ x \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \ y \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \ z \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline y \ y \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline y \ z \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \ y \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \ z \\ \hline \end{array} \\ &= x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz \end{aligned}$$

Nous définissons la base des fonctions symétriques **élémentaire**, par l'ensemble  $\{e_\mu(X)\}_{\mu \vdash n \in \mathbb{N}}$  où pour  $\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  nous avons :

$$e_n(X) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \text{ et}$$

$$e_\mu(X) := e_{\mu_1}(X) \dots e_{\mu_k}(X).$$

Nous noterons  $e_\mu$  pour  $e_\mu(X)$ .

**Exemple :**

$$e_2(x, y, z, w) = xy + xz + xw + yz + yw + zw$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème.

**Théorème (Jacobi-Trudi) :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \vdash n$ , un partage tel que  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_l$ . Nous avons :

$$s_\lambda = \det((e_{\lambda_i - i + j})_{i,j}).$$

où  $e_n = 0$  si  $n < 0$  et  $e_0 = 1$ .

**Preuve :** Considérons le plan cartésien à coordonnées entières auquel on ajoute des points à l'infini. Autrement dit le plan  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ . Et considérons un chemin possiblement infini, disons  $p = s_1, s_2, s_3, s_4 \cdots$ , ayant uniquement des pas vers le nord, allant de  $(a, b)$  à  $(a, b+1)$ , ou vers l'est, allant de  $(a, b)$  à  $(a+1, b)$ . Un chemin peut terminer en  $(x, \infty)$  seulement s'il termine par une infinité de pas vers le nord. Remarquons que les chemins débutants et terminant dans ce plan ont tous un nombre fini de pas vers l'est.

Considérons  $L$  la fonction d'étiquetage des pas vers l'est tel que  $L(s_i) = i$  si  $s_i$  est un pas vers l'est et  $L(s_i) = \emptyset$  sinon.

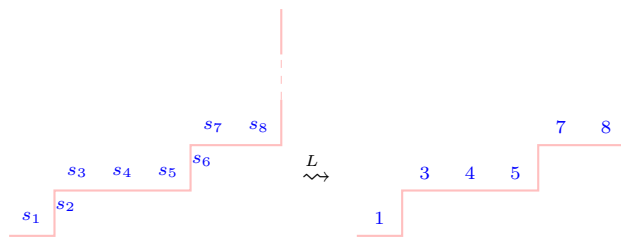
Pour  $p$  un chemin partant de  $u$  et terminant en  $v$ , nous noterons  $u \xrightarrow{p} v$ .

Soit la fonction de poids défini pour un chemin  $p$  ayant un nombre fini de pas vers l'est :

$$x^p = \prod_{s_i \in p} x_{L(s_i)}, \text{ avec } x_\emptyset = 1$$

Remarquons que cette fonction permet d'associer à tout chemin  $p$  un monôme libre de carrés, par définition de  $L$ .

**Exemple :** Soit  $p$  le chemin donné par :



Ainsi pour ce chemin nous avons  $x^p = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8$ .

De plus, il est possible d'associer à tous chemins à tout monôme libre de carrés. En considérant l'ensemble des indices des variables contenus dans ce monôme et en posant

$s_i$  est un pas vers l'est s'il existe une variable dans le monôme ayant  $i$  comme indice et  $s_i$  est un pas vers le nord sinon.

Remarquons aussi que pour  $(a, b)$  fixé nous avons que  $\{(a, b) \xrightarrow{P} (a+n, \infty)\}$  est l'ensemble des chemins ayant exactement  $n$  pas vers l'est. Alors la bijection entre les chemins et les monômes libre de carrés nous donne que  $\{x^P | (a, b) \xrightarrow{P} (a+n, \infty)\}$  est l'ensemble des monômes à  $n$  variables et libre de carrés. d'où l'égalité :

$$e_n(X) = \sum_{(a,b) \xrightarrow{P} (a+n, \infty)} x^P.$$

Soit  $u_1, u_2, \dots, u_l$  et  $v_1, v_2, \dots, v_l$  respectivement  $l$ -uplets de points de départ et d'arrivée,  $\sigma \in \mathbb{S}_l$  et  $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \dots, p_l)$  un  $l$ -uplet de chemins tels que  $u_i \xrightarrow{p_i} v_{\sigma(i)}$ . Alors le poids associé à la famille  $\mathcal{P}$  :

$$x^{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^l x^{p_i}.$$

De plus, définissons la signature de  $\mathcal{P}$  par  $(-1)^{\mathcal{P}} = \text{sign}(\sigma)$ .

Soit  $\lambda$  fixé. Considérons,  $u_i = (-i, i)$  et  $v_i = (\lambda_i - i, \infty)$ . Alors par le choix des sommets, la distance sur l'axe des  $x$  entre  $u_j$  et  $v_i$  est  $(\lambda_i - i) - (-j) = (\lambda_i - i + j)$ . Nous avons alors :

$$e_{\lambda_i + j - i}(X) = \sum_{u_j \xrightarrow{p_j} v_i} x^{\mathcal{P}}.$$

D'où :

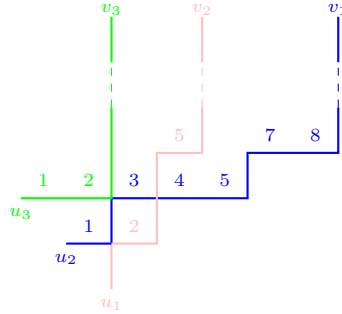
$$\begin{aligned} \det((e_{\lambda_i - i + j}(X))_{i,j}) &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_l} \text{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^l e_{\lambda_{\sigma(j)} + j - \sigma(j)}(X), \text{ déterminant de Leibniz,} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_l} \text{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^l \sum_{u_j \xrightarrow{p_j} v_{\sigma(j)}} x^{p_j}, \text{ par ce qui précède,} \\ &= \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} x^{\mathcal{P}}, \text{ par définition du poids et de la signature de } \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Notons que la dernière somme est prise sur toutes les familles de chemins possible entre les  $u_i$  et les  $v_j$ .

**Exemple :** Considérons une famille de chemins  $\mathcal{P}$  associée à un terme du déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} e_5(X) & e_6(X) & e_7(X) \\ e_2(X) & e_3(X) & e_4(X) \\ 1 & e_1(X) & e_2(X) \end{pmatrix}.$$

La famille de chemins  $\mathcal{P}$  est associée au partage 532 et est donnée par :



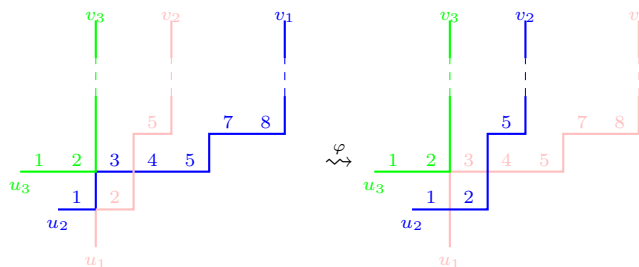
Nous avons  $x^{\mathcal{P}} = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5^2 x_7 x_8$  et  $(-1)^{\mathcal{P}} = \text{sign}((12)) = -1$ .

Nous allons maintenant créer une involution qui associe 2 à 2 des termes de signes inverses. Ainsi, la dernière égalité sera simplifiée.

Soit  $\mathcal{P}$  une famille de chemin allant de  $u_1, \dots, u_l$  à  $v_1, \dots, v_l$ . Considérons  $\varphi$  une bijection qui associe à  $\mathcal{P}$  lui-même si pour tout  $i, j$  nous avons  $p_i \cap p_j = \emptyset$  (c.-à-d. qu'aucun chemin ne se croise). Remarquons que le positionnement des  $u_i$  et des  $v_j$  rend ceci possible seulement si  $\mathcal{P}$  est associé à la permutation identité.

Sinon, prenons les plus petits  $i$  tels que  $p_i \cap p_k \neq \emptyset$  et le plus petit  $j$  tel que  $p_i \cap p_j \neq \emptyset$ . Prenons, aussi,  $w$  le point d'intersection le plus au sud-ouest de  $p_i$  et  $p_j$ . De plus, associons à  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  tel que  $q_i = u_i \xrightarrow{p_i} w \xrightarrow{p_j} v_{\sigma(j)}$ ,  $q_j = u_j \xrightarrow{p_j} w \xrightarrow{p_i} v_{\sigma(i)}$  et  $p_k = q_k$  pour tout  $k$  différent de  $i$  et  $j$ . Nous avons donc par construction que  $i, j$  sont les plus petits indices tels que  $q_i \cap q_j \neq \emptyset$  et  $w$  est l'intersection de  $q_i$  et  $q_j$  la plus au sud-ouest donc  $\varphi(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$  et c'est bien une involution.

**Exemple :** Soit  $\mathcal{P}$  une famille de chemin associé à  $\lambda = 5, 3, 2$  donnée par :



Les deux familles de chemins sont bien de signe inverse. En effet, soit  $\tau$  la transposition  $i, j$ . Par construction  $u_k \xrightarrow{q_k} v_{\tau\sigma(k)}$  pour tout  $1 \leq k \leq l$ . Donc :

$$(-1)^{\mathcal{Q}} = \text{sign}(\tau\sigma) = \text{sign}(\tau)\text{sign}(\sigma) = -\text{sign}(\sigma) = -(-1)^{\mathcal{P}}.$$

Notons que pour  $w = (w_x, w_y)$  nous avons le même nombre de pas avant  $p_i$  et  $p_j$ , car le nombre de pas avant  $w$  est donné par :

$$w_x - (-i) + w_y - i = w_x + w_y = w_x - (-j) + w_y - j.$$

Donc par définition du poids  $\varphi$  préserve le poids. En effet, soit  $z$  le nombre de pas avant le point  $w$  nous avons :

$$\begin{aligned} x^{\mathcal{P}} &= \prod_{m=1}^l x^{p_m} = \prod_{\substack{m=1, \\ m \neq i, m \neq j}}^l x^{p_m} \prod_{s_{i,k} \in p_i} x_{L(s_{i,k})} \prod_{s_{j,k} \in p_j} x_{L(s_{j,k})}, \\ &= \prod_{\substack{m=1, \\ m \neq i, m \neq j}}^l x^{p_m} \left( \prod_{\substack{s_{i,k} \in p_i \\ k \leq z}} x_{L(s_{i,k})} \prod_{\substack{s_{i,k} \in p_i \\ k > z}} x_{L(s_{i,k})} \right) \left( \prod_{\substack{s_{j,k} \in p_j \\ k \leq z}} x_{L(s_{j,k})} \prod_{\substack{s_{j,k} \in p_j \\ k > z}} x_{L(s_{j,k})} \right), \\ &= \prod_{\substack{m=1, \\ m \neq i, m \neq j}}^l x^{q_m} \prod_{\substack{s_{i,k} \in q_i \\ k \leq z}} x_{L(s_{i,k})} \prod_{\substack{s_{i,k} \in q_i \\ k > z}} x_{L(s_{i,k})} \prod_{\substack{s_{j,k} \in q_j \\ k \leq z}} x_{L(s_{j,k})} \prod_{\substack{s_{j,k} \in q_j \\ k > z}} x_{L(s_{j,k})}, \\ &= \prod_{\substack{m=1, \\ m \neq i, m \neq j}}^l x^{q_m} \left( \prod_{\substack{s_{i,k} \in q_i \\ k \leq z}} x_{L(s_{i,k})} \prod_{\substack{s_{j,k} \in q_i \\ k > z}} x_{L(s_{j,k})} \right) \left( \prod_{\substack{s_{j,k} \in q_j \\ k \leq z}} x_{L(s_{j,k})} \prod_{\substack{s_{i,k} \in q_j \\ k > z}} x_{L(s_{i,k})} \right), \\ &= \prod_{\substack{m=1, \\ m \neq i, m \neq j}}^l x^{q_m} \prod_{s_{i,k} \in q_i} x_{L(s_{i,k})} \prod_{s_{j,k} \in q_j} x_{L(s_{j,k})}, \\ &= \prod_{m=1}^l x^{q_m} = x^{\mathcal{Q}} \end{aligned}$$

où  $s_{r,k}$  est  $k$ -ième pas du chemin  $p_r$ .

Nous avons alors :

$$\det((e_{\lambda_i+j-i}(X))_{i,j}) = \sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ tels que } \forall i,j \\ p_i \cap p_j = \emptyset}} x^{\mathcal{P}}$$

Remarquons que la seule permutation permettant la condition sous la somme est l'identité.

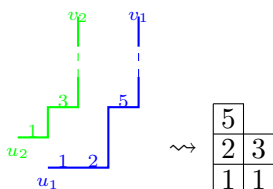
À une famille de chemin donné,  $\mathcal{P}$ , nous pouvons associer un tableau de la façon suivante. Pour la  $n$ -ième colonne et la  $k$ -ième ligne ont rempli la case avec la donnée  $L(s_{n,j})$ , où  $j$  est le  $k$ -ième pas vers l'est dans le chemin  $p_n$ .

Comme la distance entre  $u_i$  et  $v_i$  est de  $\lambda_i$ , le chemin  $p_i$  a exactement  $\lambda_i$  pas vers l'est. Donc la colonne  $i$  est de hauteur  $\lambda_i$  et nous avons alors un tableau de forme  $\lambda'$ .

De plus, par définition de  $L$  les colonnes sont strictement croissantes. Il reste à montrer que les lignes sont croissantes (non strict) et qu'on peut associer une famille de chemin à tous les tableaux semi-standard.

Par contradiction si les lignes n'étaient pas croissantes nous aurions deux chemins  $p_n = s_1 s_2 \dots$  et  $p_{n-1} = t_1 t_2 \dots$ , tels que le  $k$ -ième pas vers l'est du chemin  $p_n$  est le pas  $s_j$  et le  $k$ -ième pas vers l'est du chemin  $p_{n-1}$  est le pas  $s_i$ , avec  $j < i$ . Comme  $u_n = (-n, n)$  et  $u_{n-1} = (1-n, n-1)$ , nous avons alors que la fin du  $k$ -ième pas vers l'est du chemin  $p_n$  est à la coordonné  $(-n+k, n+j-k)$  et le début du  $k$ -ième pas vers l'est du chemin  $p_{n-1}$  est à la coordonné  $(1-n+k-1, n-1+i-k)$ . Donc le chemin  $p_n$  est sous le chemin  $p_{n-1}$  sur la droite  $x = -n+k$  ou ils se croisent au point  $(-n+k, n+j-k)$ , mais ceci est impossible, car pour qu'il n'y ait pas de crissement le chemin  $p_n$  doit rester au-dessus et à gauche du chemin  $p_{n-1}$ . C'est donc bien un tableau semi-standard.

**Exemple :** Soit  $\mathcal{P}$  une famille de chemin associé à  $\lambda = 32$ , le tableau associé à  $\mathcal{P}$  de la forme  $\lambda'$  est donné par :



Pour trouver la famille de chemin associé à un tableau standard il suffit de construire la famille de chemins  $p_n = s_1 s_2 \dots$  où  $s_i$  est un pas vers l'est si et seulement si  $i$  est la donnée d'une case de la colonne  $n$  du tableau.

Alors nous avons bien que :

$$s_{\lambda'}(X) = \sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ associé à l'identité} \\ \text{et qui ne se croisent pas}}} x^{\mathcal{P}} = \det((e_{\lambda_i+j-i}(X))_{i,j}) .$$

### Bibliographie

[B2009] «Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces», F. Bergeron, Traités de mathématiques de la SMC, SMC (2009).

[Mac1995] «Symmetric functions and Hall polynomials», I.G.Macdonald, 2e édition, Oxford science publication (1995).

[S1991] «The symmetric groupe. Representations, combinatorial algorithms, ans symmetric functions» B.Sagan, Springer (1991).